Mathematik zur Entspannung

The Lighter Side of Mathematics[*]

Die häufig anzutreffende Übersetzung „Unterhaltungsmathematik“ von „Recreational Mathematics“ trifft den Kern der Sache nicht wirklich. Gemeint sind mathematische Spiele und Puzzle, die meist keine tieferen Kenntnisse der Mathematik voraussetzen. Obwohl der verwendete Stil weniger formal und eher unterhaltend bzw. kurzweilig ist, werden nichtsdestotrotz auch aktuelle Forschungsfragen aufgegriffen bzw. neue Forschungsfragen motiviert.

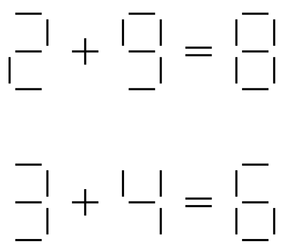

Abbildung 1: Welches Hölzchen muss man umlegen?

Streichholzlegespiele, wie in Abbildung 1 dargestellt, haben die meisten schon einmal gesehen. Hier gilt es jeweils genau ein Hölzchen so umzulegen, dass die zwei Gleichungen richtig sind. Sie sind ein netter Zeitvertreib, und junge Schüler können mit ihnen spielerisch Plus und Minus üben. Aber enthalten Streichholzspiele auch „richtige“ Mathematik?

Bauwerke mit vielen Streichhölzern

Legt man mehrere Streichhölzer Kopf an Kopf, so entsteht ein sogenannter Graph. Die Stellen an denen ein oder mehrere Köpfe zusammentreffen nennen wir Knoten des Graphens und die Streichhölzer, die diese Knoten verbinden, nennen wir Kanten des Graphens.

Legt man solche Streichholzgraphen, so stellt sich die Frage, wie viele Streichhölzer es bei fester Knotenanzahl maximal werden können.

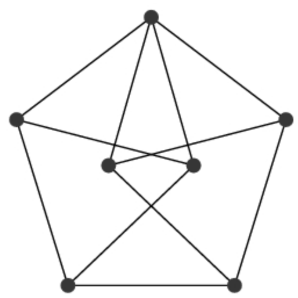

Abbildung 2: Die Moser-Spindel.

In Abbildung 2 ist als Beispiel ein Streichholzgraph aus 7 Knoten und 11 Streichhölzern gezeichnet. Es soll zunächst zugelassen werden, dass sich die Streichhölzer überkreuzen (zwei Kanten dürfen jedoch höchstens einen gemeinsamen Punkt besitzen, also z. B. nicht direkt übereinander liegen).

Mit u(n) bezeichnen wir die maximal mögliche Kantenanzahl eines Streichholzgraphen mit n Knoten. Im Rahmen einer Diplomarbeit sind folgende Zahlen bestimmt worden:

n	1	2	3	4	5	6	7
u(n)	0	1	3	5	7	9	12
n	8	9	10	11	12	13	14
u(n)	14	18	20	23	27	30	33

Am liebsten hätte man natürlich eine Formel für u(n) (wie z. B. u(n)=3n), denn dann könnte man u(n) für alle vernünftigen n sofort angeben. Leider ist so eine Formel für den genauen Wert unbekannt. Immerhin kennt man Formeln für sogenannte untere und obere Schranken: Man weiß, dass Zahlen a und b existieren mit

$$n^{1+\frac{a}{\log\log n}} \leq u(n) \leq bn^{\frac{4}{3}}.$$

Paul Erdős vermutete, dass die untere Schranke die richtige ist und setzte ein Preisgeld für einen Beweis oder eine Widerlegung dieser Vermutung aus. Leider ist Paul Erdős 1996 verstorben; das Preisgeld gibt es aber immer noch zu gewinnen.

Färbungszahl der Ebene

Ein weiteres ungelöstes mathematisches Problem ist die sogenannte Färbungszahl der Ebene. Hierbei ist eine Färbung der Ebene mit möglichst wenig verschiedenen Farben gesucht, so dass je zwei Punkte mit Abstand eins unterschiedlich gefärbt sind. Etwas schwierig ist bei diesem Problem, dass die Ebene aus unendlich vielen Punkten besteht.

Um endliche Teilprobleme zu bekommen, können wir das Problem betrachten, die Knoten von Streichholzgraphen mit möglichst wenig Farben so zu färben, dass jedes Streichholz zweifarbig ist. Der Leser ist herzlich dazu eingeladen nachzuprüfen, dass die Moser-Spindel aus Abbildung 2 nicht mit drei Farben gefärbt werden kann. Die Färbungszahl der Ebene beträgt also mindestens vier.

Interessanterweise lässt sich auch jeder andere Streichholzgraph mit höchstens 6197 Knoten (weiter hat man bisher noch nicht gerechnet) mit sechs Farben so färben, dass jedes Streichholz zweifarbig ist. Falls es einen Streichholzgraphen gibt, bei dem

[*] Ebenfalls der Titel des Tagungsbandes einer Recreational Mathematics Tagung, der auf die zwei Bedeutungen „leicht“ und „ein Streichholz anzünden“ (to light a match) anspielt.

man sieben Farben benötigt, so muss dieser schon ziemlich viele Knoten besitzen.

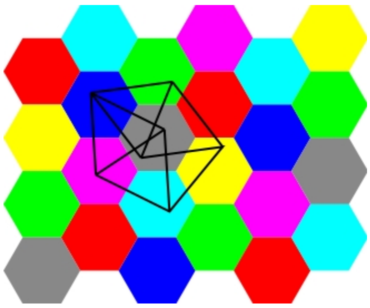

Abbildung 3: Eine Färbung (Quelle: David Eppstein - The Geometry Junkyard).

In Abbildung 3 ist eine Färbung der Ebene mit sieben Farben angegeben (die natürlich noch periodisch auf die ganze Ebene fortgesetzt werden muss), so dass für die Färbungszahl der Ebene

$$4 \leq \chi\left(\mathbb{E}^2\right) \leq 7$$

gilt. Dies ist auch der aktuelle Kenntnisstand in dieser Frage. Für den dreidimensionalen Raum ist unser Wissen sogar noch beschränkter:

$$6 \leq \chi\left(\mathbb{E}^3\right) \leq 15.$$

Regelmäßige Streichholzgraphen

Ein regelmäßiger Graph, ein sogenannter k-regulärer Graph, ist ein Graph, bei dem jeder Knoten Endpunkt von genau k Kanten ist. Das Kantenmodell eines Würfels ist z. B. ein drei-regulärer Graph. Heiko Harborth warf die Frage nach der kleinstmöglichen Knotenanzahl n(k) eines k-regulären Streichholzgraphen auf. Die bisher bekannten Werte sind n(1)=2, n(2)=3, n(3)=6, n(4)=9 und n(5)=18.

Mit Hilfe sogenannter iterierter Minkowski-Summen von Dreiecken, siehe Abbildung 4 für ein Beispiel einer Minkowski-Summe, lassen sich Beispiele

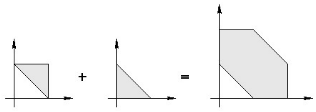

Abbildung 4: Beispiel einer Minkowski-Summe $S_1 \oplus S_2 := \{p + q \mid p \in S_1,\, q \in S_2\}$.

konstruieren, die zu einer oberen Schranke von

$$\begin{cases} 3^{k/2} & \text{für gerade k,} \\ 2 \cdot 3^{(k-1)/2} & \text{für ungerade k} \end{cases}$$

führen. Es wird vermutet, dass diese Konstruktion optimal ist.

Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen

Die Kanten des Streichholzgraphen aus Abbildung 2 überkreuzen sich zum Teil. Verbieten wir dies, so spricht man von planaren Graphen bzw. ihren Einbettungen in die Ebene, und wir können die Fragen aus den vorherigen Abschnitten erneut betrachten.

Die maximal mögliche Kantenanzahl eines Streichholzgraphen aus n Knoten ohne Überkreuzungen bezeichnen wir mit U(n). Beginnt man mit einem Dreieck und nimmt man auf einem regulären Dreiecksgitter spiralförmig weitere Einheitsdreiecke hinzu, siehe Abbildung 5, so erhält man die untere Schranke

$$U(n) \geq 3n - \left\lceil \sqrt{12n - 3} \right\rceil.$$

Für n=7 erhält man bei dieser Konstruktion ein regelmäßiges Sechseck inklusive seinem Mittelpunkt. Nachzählen liefert

$$3 \cdot 7 - \left\lceil \sqrt{12 \cdot 7 - 3} \right\rceil = 12$$

Kanten. Es wird vermutet, dass diese untere Schranke nicht verbessert werden kann.

Diese Spiralkonstruktion ist aber bewiesenermaßen die optimale Lösung eines anderen Problems. Betrachten wir hierzu die

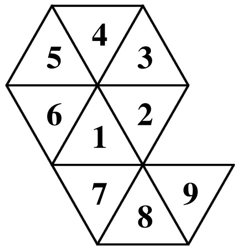

Abbildung 5: Spiralkonstruktion.

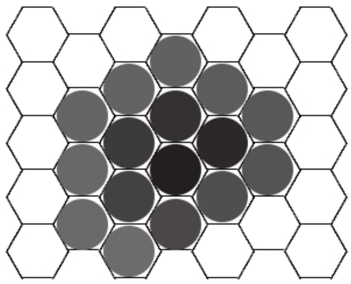

Abbildung 6: Einheitskreise mit der maximalen Anzahl an Berührungspunkten.

Aufgabe, n Einheitskreise so in die Ebene zu legen, dass sie sich nicht überlappen und die maximal mögliche Anzahl an Berührungspunkten haben, siehe Abbildung 6.

Färbungszahl von planaren Graphen

Im Gegensatz zur Färbungszahl der Ebene bzw. der Färbungszahl von Streichholzgraphen ist die Färbungszahl von planaren Graphen (sogar ohne die Einschränkungen die Streichholzgraphen mit sich bringen) vollständig bestimmt worden. Das Ergebnis ist der berühmte Vierfarbensatz von Appel und Haken aus dem Jahre 1976. Er besagt, dass man jede Landkarte, bei der die einzelnen Länder zusammenhängend sind, mit Hilfe von höchstens vier Farben so färben kann, dass keine zwei Länder mit einer gemeinsamen Grenzlinie in derselben Farbe gefärbt sind, oder eben auch, dass man planare Graphen mit höchstens vier Farben so färben kann, dass alle Kanten zweifarbig sind.

Regelmäßige Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen

Nehmen wir bei dem Problem „k-reguläre Streichholzgraphen mit der kleinsten Anzahl N(k) an Knoten“ noch die Eigenschaft, dass sich keine zwei Kanten im Inneren überkreuzen dürfen, hinzu, so erhalten wir ein sehr interessantes offenes Problem.

Für k=1 und k=2 sind die kleinsten Beispiele durch einen Punkt und ein Dreieck gegeben, so dass N(1)=1 und N(2)=3 gilt. Die Bestimmung des Beispiels zu N(3)=8 ist ein nettes kurzweiliges Rätsel. Also packen Sie die Streichhölzer aus. Falls Sie kein Beispiel mit 8 Knoten bzw. 12 Kanten finden, so versuchen Sie es doch einfach mit 10 Knoten bzw. 15 Kanten. Haben Sie das Beispiel jedoch einmal entdeckt, so bietet sich eine gute Möglichkeit, sich in Kneipen das eine oder andere Bier zu erwetten.

Da planare Graphen (also insbesondere auch regelmässige Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen) mindestens einen Knoten, der Endpunkt von höchstens fünf Kanten ist, besitzen, ist N(k) keine endliche Zahl, sobald k größer als fünf ist. Ob es einen fünf-regulären Streichholzgraphen ohne Überkreuzungen gibt, ist immer noch ein offenes Problem, auch wenn Beweise für die Nichtexistenz solcher Graphen gegeben wurden (die, wie sich im Nachhinein herausstellte, alle Lücken hatten).

Für k=4 ist das kleinste bisher bekannte Beispiel der in Abbildung 7 abgebildete sogenannte Harborth Graph. Dieser Graph fungiert nun doch schon seit einigen Jahren als Logo der Abteilung für Diskrete Mathematik

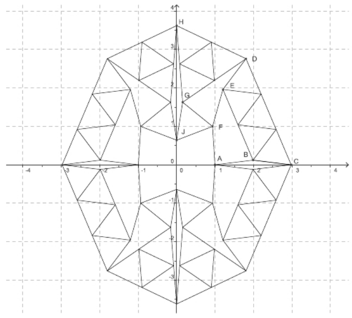

Abbildung 7: Der Harborth Graph - ein 4-regulärer kreuzungsfreier Streichholzgraph aus 52 Knoten.
(Quelle: E. H.-A Gerbracht - Minimal Polynomials for the Coordinates of the Harborth Graph).

an der Technischen Universität Braunschweig[1]. Bisher konnte jedoch noch niemand seine Minimalität beweisen bzw. ein kleineres Beispiel angeben.

Wir wollen nun eine untere Schranke für die Anzahl der Knoten eines minimalen Beispiels herleiten und machen das, was man in der Mathematik häufig macht: wir formulieren das Problem um und ignorieren zunächst einmal einige unserer Nebenbedingungen. In der Chemie bezeichnet man chemische Verbindungen der gleichen Summenformel, aber unterschiedlicher chemischer Struktur und somit teilweise auch unterschiedlichen biologischen Eigenschaften, als Strukturisomere, siehe Abbildung 8 für die zwei möglichen Strukturisomere des Butans.

Die pharmazeutische Industrie ist fortwährend auf der Suche nach neuen Medikamenten und Wirkstoffen, welche die gewünschten Eigenschaften der bekannten Originale, etwa von Aspirin, teilen bzw. sogar übertreffen. Da man auch in den

[1] http://www.mathematik.tu-bs.de/dm/

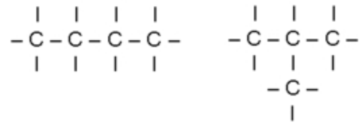

Abbildung 8: Strukturisomere des Kohlenwasserstoffs C_4H_{10} (Butan).

industriellen Großlabors nur begrenzt viele Substanzen testen kann, verwendet man Computer um vorherzusagen, welche Strukturen die gewünschten Eigenschaften haben können. Aus diesen und anderen Gründen gibt es Computerprogramme, wie z. B. Molgen[2], welches an der Universität Bayreuth entwickelt wurde, mit denen man alle Strukturisomere zu einer gegebenen Summenformel im Computer erzeugen kann.

Doch was haben unsere regulären kreuzungsfreien Streichholzgraphen nun mit chemischen Verbindungen zu tun? Wenn wir die Strukturisomere eines Kohlenstoffmoleküls C_n erzeugen, so erhalten wir Graphen, die vierregulär sind. Die Eigenschaften, dass der Graph planar und die Kanten die Länge eins haben sollen, können wir zwar nicht direkt mit Hilfe von Molgen erzwingen, aber es gibt einen Trick, wie man die Anzahl der erzeugten Kandidaten reduzieren kann. Von bestimmten kleinen Graphen kann man mit etwas Mathematik herausfinden, dass sie entweder nicht planar sind oder kein Teil eines Streichholzgraphen sein können, siehe Abbildung 9.

Da die Eigenschaften von chemischen Verbindungen zum Teil auch durch ihre Teilverbindungen bestimmt werden, kann Molgen, siehe Abbildung 10 für einen Screenshot, mit solchen verbotenen Teilgraphen umgehen. Damit lässt sich zeigen,

[2] http://molgen.de

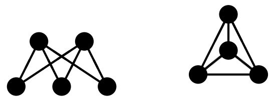

Abbildung 9: Verbotene Teilgraphen.

dass jeder vier-reguläre kreuzungsfreie Streichholzgraph aus mindestens 19 Knoten bestehen muss (diese untere Schranke lässt sich „mit der Hand“ noch weiter verbessern, was aber etwas fehleranfällig ist, da viele Teilfälle unterschieden werden müssen).

Ein übersehenes klassisches Problem?

Bei der Betrachtung von Streichholzgraphen hat man damit zu kämpfen, dass diese zum Teil beweglich sein können, und man somit nicht mit festen Koordinaten rechnen kann.

Ein Ansatz, mit dem man manchmal die Nichtexistenz von kreuzungsfreien Streichholzgraphen zeigen kann, sind Flächeninhaltsbetrachtungen: Der rechte Graph aus Abbildung 9 besitzt als äußere Fläche ein Dreieck. Im Inneren müssten aber drei gleich große Dreiecke enthalten sein, was natürlich nicht möglich ist.

Wenn die äußere Fläche, nun etwas allgemeiner, ein k-Eck ist, so können alle inneren Flächen zusammen höchstens so viel Fläche wie ein gleichseitiges k-Eck der Seitenlänge eins besitzen. Die größten gleichseitigen k-Ecke sind bekanntlich die regelmäßigen k-Ecke. Man kann die Frage aber auch in die andere Richtung stellen: Welchen Flächeninhalt hat ein gleichseitiges k-Eck mit Seitenlänge eins mindestens?

Für gerade k kann man beliebig nahe an den Flächeninhalt Null herankommen, indem man eine von zwei Seiten begrenzte Strecke betrachtet. Mit einer ähnlichen Konstruktion kann man für ungerades k beliebig nahe an den Flächeninhalt eines gleichseitigen Einheitsdreiecks herankommen, aber ist dies bereits die minimalmögliche Fläche? Für k=3,5,7 ist sie es bewiesenermaßen, für größeres k bleibt dies nur eine Vermutung.

Wie schwierig sind Streichholzprobleme?

Wir haben ein paar ungelöste Probleme mit Streichholzgraphen gesehen. Eine aus der Informatik bekannte Möglichkeit, die algorithmische Schwierigkeit von Problemen zu messen, ist anzugeben, ob es einen Lösungsalgorithmus geben kann, der ein Problem in polynomialer Laufzeit, gemessen in Abhängigkeit vom Speicherverbrauch der Problemdaten, geben kann oder nicht. In unserem Fall besteht das Problem darin zu entscheiden, ob ein gegebener Graph kreuzungsfrei als Streichholzgraph in die Ebene einbettbar ist oder nicht. Dieses Problem ist $\mathcal{NP}$-schwer, d. h. es gibt vermutlich keinen polynomialen Algorithmus für dieses Problem. Falls jemand doch einen findet, so ist er um eine Million Dollar reicher, denn dann hätte er eines der sieben Milleniumsprobleme der Mathematik gelöst (ausgeschrieben vom Clay Mathematics Institute[3]).

Streichholzprobleme sind doch nur Rumprobiererei, was soll daran schwierig sein? Sicherlich findet man mit etwas Geduld einen drei-regulären Streichholzgraphen aus acht Knoten ohne Überschneidungen. Die Entdeckung des Harborth Graph ist bestimmt eine sehr beachtliche Puzzleleistung, aber muss man dafür etwas von Mathematik verstehen? Auch wenn der Entdecker Mathematikprofessor ist, braucht man ehrlich gesagt für das Finden der Lösungen von Streichholzaufgaben keine oder nur wenig Mathematik. Der schwierige Teil ist zu zeigen, dass es kein Beispiel mit weniger als 52 Knoten geben kann. Denn, nur weil seit etlichen Jahren kein kleineres Beispiel gefunden wurde, heißt das noch lange nicht, dass es keines geben kann.

Um anzudeuten, wie schwer sich die Mathematik mit Streichholzgraphen tut, soll erwähnt werden, dass es erst 2006 gelungen ist, die Koordinaten des Harborth Graphen mit Hilfe von Computeralgebra zu berechnen. Sie sind Nullstellen von Polynomen vom Grad 22 (weniger geht nicht!).

Streichholzprobleme können also mitunter ziemlich schwierig sein, wenn man die zugrunde liegende Mathematik betrachtet. Kennt man diese aber erst gar nicht oder ignoriert sie einfach, so kann es eben doch manchmal gelingen, so ein Problem mit elementaren cleveren Ideen zu lösen.

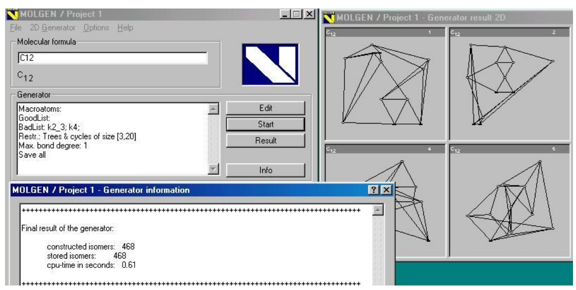

Abbildung 10: Screenshot des Computerprogramms Molgen.

Autor:	Sascha Kurz
am:	Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik Universität Bayreuth
Phone:	0921 / 55-7353
Email:	sascha.kurz@uni-bayreuth.de
www:	www.wm.uni-bayreuth.de\index.php?id=sascha

[3] http://www.claymath.org